EVALUACION NUMERICA DE UN NUEVO ELEMENTO FINITO SINGULAR EN PROBLEMAS DE FRACTURA EN MODO MIXTO

F. DIEZ, L. GAVETE Y F. MICHAVILA

Departamento de Calculo Numérico e Informática
E.T.S. Ingenieros de Minas
UNIVERSIDAD POLITECNICA DE MADRID
ESPAÑA

RESUMO

Neste trabalho, após um repasse dos distintos métodos de cálculo numérico dos factores de intensificacao de tensoes, apresenta se um novo elemento finito singular que calcula -se baixo condicoes de carga mistas (modo I e II combinados). Como conclusao extrain-se algumas consequências sobre o uso deste elemento e dans-se algumas recomendacoes para a sua utilizacao.

ABSTRACT

In the present paper after reviewing the different methods for evaluating the stress intensity factors, we present a new singular finite element, which is evaluated under missed loading conditions (Mode I and Mode II are presented). As conclusion there are taken out some results about the performance of these element, and some advices for its use are given.

RESUME

Dans ce travail, apres faire una revision des differentes methodes de calcul numérique des facteurs d'intensité des contraintes, on présente un nouvel elément fini, qui est evalué sous conditions mixtes de chargement (mode I et mode II combinés). On concluit quelques conséquences sur le performance de cet element, est on fait quelques recommendations pour son emploi.

1. INTRODUCCION

Como es bien sabido las soluciones analíticas de problemas de mecánica de la fractura se limitan a situaciones idealizadas donde: (i) el dominio se considera infinito, (ii) el material es homogéneo e isótropo y (iii) las condiciones de contorno son relativamente simples. Para poder abordar problemas prácticos sobre estructuras de cualquier forma, condiciones de contorno complejas y propiedades arbitrarias, se hacen imprescindibles las técnicas numéricas. En este sentido el método de los elementos finitos es una herramienta de uso general y muy extendido en el campo de la mecénica de la fractura.

Existen varios elementos finitos especiales para problemas de fractura plana [1] que intentan reproducir el comportamiento singular de la solución (tensiones o deformaciones) en el vértice de la fisura. Todos ellos han sido abundantemente analizados y comprobados en la bibliografía (ver por ejemplo [1], [2]), pero en general se observaba una laguna en el análisis teórico de la solución aproximada dentro del elemento. Este estudio ha sido abordado recientemente [3], [4] y muestra claramente las razones por las cuales algunos elementos finitos producían resultados anómalos en algunos casos. Por otro lado se observa claramente que la mayoría de los tests numéricos efectuados han sido llevados a cabo considerando condiciones de carga simples (concretamente en modo I). Sin embargo es sabido que la prueba más severa para elementos singulares es en modo mixto donde están presentes el Modo I y el Modo II. En el presente trabajo se pretende efectuar una evaluación numérica de un nuevo elemento finito singular, recientemente introducido [5], [6], bajo condiciones de carga combinadas. Para ello primeramente se harán algunas consideraciones sobre el cálculo numérico de los factores de intensificación de tensiones, que en cierto modo justificarán la solución propuesta (§2). En el §3 se formula un nuevo elemento finito singular isoparamétrico de lados curvos, y en el §4 se considera una pieza sometida a una carga en modo mixto, que se analiza con el método propuesto haciéndose varias recomendaciones sobre el uso de elementos singulares.

2. SOBRE EL CALCULO NUMERICO DE LOS FACTORES DE INTENSIFICACION DE TENSIONES

Consideremos un sólido fisurado sometido a la acción de una serie de fuerzas exteriores. La resolución de las ecuaciones de equilibrio cuasi-estático en un entorno del vértice de la grieta y bajo las hipótesis de que aquél se encuentra en un medio linealmente elástico, isótropo y homogéneo conduce a las siguientes componentes asintóticas del campo de desplazamientos y tensiones:

$$u_i = K_I \cdot \frac{1}{2\mu} \sqrt{r/2\pi}\ f_i\ (\theta) + K_{II} \frac{1}{2\mu} \sqrt{r/2\pi}\ g_i\ (\theta) \qquad i=1,2$$

$$\sigma_{ij} = K_I \cdot \frac{1}{\sqrt{(2\pi r)}} f_{ij}(\theta) + K_{II} \cdot \frac{1}{\sqrt{(2\pi r)}} g_{ij}(\theta) \quad i=1,2 \tag{1b}$$

En las expresiones anteriores los subíndices hacen referencia al sistema de ejes de la figura 1, r y θ son las coordenadas polares centradas en S (vértice de la grieta).

Las funciones angulares f_i, g_i, f_{ij} y g_{ij} sólo dependen del ángulo θ y de la aproximación plana elegida, μ es el módulo de cizallamiento y K_I y K_{II} los factores de intensificación de tensiones en modo I y II.

La expresión (1b) indica que las tensiones se hacen infinitas en el vértice dela grieta. Físicamente existe sin embargo una relajación de las tensiones debido a deformaciones inelásticas y plastificación en un entorno de S. Si la zona donde se producen estos fenómenos es pequeña comparada con la singular (donde tienen aplicación las (1)) podemos tratar el problema como elástico, lineal, (mecánica de la fractura lineal y elástica, MFLE). Restringiéndonos por tanto a la MFLE podemos decir que todos los criterios de fractura se reducen a una relación del tipo:

$$f(K_I,\ K_{II},\ \text{constantes del material}) = 0 \tag{2}$$

Es por tanto fundamental según indica (2) el cálculo de los factores K_I y K_{II}. Para ello se puede comenzar analizando las expresiones (1). Si la solución del problema elástico es conocida (mediante un análisis por el método de los elementos finitos por ejemplo), K_I, y K_{II} pueden ser evaluados en cualquier punto próximo a S donde son válidas las expresiones asintóticas (1). Haciendo dicho cálculo para $\theta = \pi$ y $\theta = -\pi$ se llega a las siguientes expresiones:

$$K_I = \lim_{r\to 0} \sqrt{(2\pi r)}\ \sigma_{22}\ (x_1 = r, 0) =$$

$$= \frac{2\mu}{k+1} \lim_{r\to 0} \sqrt{2\pi / r}\ (u_2(x_1=r_1, +0) - u_2(x_1=r, -0))$$

$$K_{II} = \lim_{r\to 0} \sqrt{(2\pi r)}\ \sigma_{12}\ (x_1 = r, 0) =$$

$$= \frac{2\mu}{k+1} \lim_{r\to 0} \sqrt{2\pi/r}\ (u_1(x_1=r_1,+0) - u_1(x_1=r,-0)) \qquad (3a,b)$$

Las expresiones (3) indican que los factores de intensificación pueden interpretarse como factores de discontinuidad de los desplazamientos [7] y [8], y en este sentido, si mediante un cálculo por el método de elementos finitos conocemos el campo de desplazamientos en puntos "suficientemente" próximos a S ($r\to 0$), se llega a las expresiones (figura 2).

$$K_I = \frac{2\mu}{k+1} \sqrt{2\pi/r}\ (u_2^A - u_2^B)$$

$$K_{II} = \frac{2\mu}{k+1} \sqrt{2\pi/r}\ (u_1^A - u_1^B) \qquad (4a,b)$$

donde $u_2^A, u_2^B, u_1^A, u_1^B$ son los desplazamientos verticales y horizontales de los nodos A y B (inicialmente superpuestos).

Las expresiones (4) constituyen la llamada técnica de correlación de los desplazamientos y dan buenos resultados siempre que A y B se encuentren suficientemente cerca del vértice de grieta, [9].

A partir de las soluciones analíticas (1), se pueden obtener nuevas aproximaciones de los factores de intensificación de tensiones cuando la zona singular es modelizada mediante elementos finitos singulares o especiales. De entre éstos los más populares son los denominados "a 1/4", para los cuales se tiene un valor mejorado de K_I y K_{II} mediante la fórmula:

$$K^*_i = 2\ K_{im} - L_{iv} \qquad i = I \text{ ó } II \qquad (5)$$

donde K_m es el factor evaluado en el "medio" del elemento ($r = 1/4$) y K_v en el vértice de dicho elemento ($r=1$). Las (5) desarrolladas conducen a las siguientes expresiones para K_I y K_{II}, [10]:

$$K_I = \frac{2\mu}{(k+1)} \sqrt{\pi/2l}\ .\ (u_2^A-u_2^B) + (u_2^D-u_2^E)$$

$$K_{II} = \frac{2\mu}{(k+1)} \sqrt{\pi/2l}\ .\ (u_1^A-u_1^B) + (u_1^D-u_1^E) \qquad (6a,b)$$

Expresiones análogas a la (5) para elementos singulares de tipo Akin [11], han sido obtenidos en modo I [10], en concreto un valor

mejorado de K_I es:

$$K_I = K_V + (2+\sqrt{2})\ (K_m - K_V) \qquad (7)$$

En definitiva se observa claramente que mediante un cálculo por el método de elementos finitos pueden obtenerse en una etapa de post-proceso (pero sin ningún esfuerzo adicional) los factores K_I y K_{II} ya sea por (4), (5), (6) ó (7). La exactitud de los resultados sólo depende de la capacidad de los elementos usados para aproximar los campos asintóticos (1).

Existen, sin embargo, otras técnicas bien conocidas para la evaluación de K_I y K_{II}, que podríamos llamar energéticas. Una de ellas sería calcular, mediante una integral de contorno la integral J de Rice, (que en el marco de la MFLE coincide con la tasa de restitución de energía). Esta integral permite calcular K_I^2 ó K_{II}^2 cuando la carga y la geometría son tales que se pueden encontrar los modos puramente simétricos o puramente antisimétricos. Sin embargo en modo mixto J nos da la forma cuadrática $K_I^2 + K_{II}^2$. Una forma de resolver el problema del desacoplamiento entre el modo I y II es calcular las integrales asociadas J_I y J_{II}, [12], ello exige calcular las partes pares e impares de las componentes de u respecto a x_2 y posteriormente dos integrales de contorno extendidas sobre un dominio simétrico respecto a Ox_1.

Recientemente se ha propuesto un nuevo método de cálculo de la tasa de restitución de energía, G, [13]. Este método, que ha ya sido implementado en un gran código de cálculo, [14], permite calcular G mediante la expresión:

$$G = -\left(\frac{\partial \pi}{\partial x} \cdot \frac{a_1}{t} + \frac{\partial \pi}{\partial y} \cdot \frac{a_2}{t}\right) \qquad (8)$$

En la expresión (8) π es el llamado indicador variacional, que es la energía potencial total del sólido fracturado, t, es el espesor de la pieza y $\partial\pi/\partial x$, $\partial\pi/\partial y$ son las integrales asociadas J_I y J_{II} de donde se obtienen K_I y K_{II}. Desgraciadamente (8) exige el conocimiento de a_1, a_2, que son las componentes de un vector unitario en la dirección en que se propagaría la grieta. Esta dirección es sin embargo desconocida a priori, si se consideran como válidos los criterios de fractura en modo mixto S y T, comúnmente admitidos, que exigen, para su formulación el conocimiento de K_I y K_{II} [15].

Es claro por tanto que ambos métodos energéticos exigen una etapa de postproceso elaborada, y son por tanto computacionalmente más costosos que los métodos basados en (1). Para estos últimos se requieren sin embargo elementos finitos capaces de reproducir el comportamiento asintótico de la solución en S. Un tal elemento se propone a continuación.

3. UN ELEMENTO FINITO SINGULAR

Desde hace tiempo [16] es sabido que una forma simple de generar elementos finitos singulares en MFLE consiste en usar elementos cuadráticos triangulares (normales o degenerados) o cuadrilaterales y desplazar los nodos intermedios más próximos al vértice de grieta a una distancia igual a 1/4 de la longitud del lado correspondiente.

Esta técnica tan simple ha dado resultados muy satisfactorios en problemas simples (principalmente en modo I). Posteriormente un análisis más detallado de dichos elementos ha sido llevado a cabo, al objeto de estudiar el comportamiento de la solución aproximada a lo largo de líneas radiales [8], [17]. Para lo que nos ocupa las conclusiones más importantes son:

i) los cuadriláteros no presentan un buen comportamiento, salvo en los propios lados del elemento,

ii) todos los elementos deben tener los lados rectos.

Se pueden relajar estos dos restricciones, es decir constuir elementos cuadrilaterales de lados curvos adecuados para la MFLE, basándose en la técnica propuesta po J. Aalto [5].

Como es bien sabido cuando se trabaja con elementos isoparamétricos cuadráticos todos los cálculos a nivel elemental son llevados a cabo sobre un elemento de referencia ubicado en un plano paramétrico de coordenadas que denominares (ξ, η), $-1 < \xi, \eta < 1$. Sea T la transformación geométrica que aplica dicho elemento sobre el elemento real ubicado en el plano (x,y). Por otro lado el método de los elementos finitos consiste en construir subespacios de dimensión finita de espacios vectoriales de dimensión infinita mediante la técnica de interpolación polinomial a trozos, tomando como soporte de interpelación los nodos de los elementos; sea π la interpolación elegida, es decir la aplicación que para cada punto (ξ, η) nos dá el valor aproximado de la solución. Por otro lado alrededor de los puntos singulares es conocida la solución analítica, mediante un desarrollo asintótico (1). Sea A dicha solución.

Por motivos de simplicidad vamos a suponer que el tema que nos ocupa es un problema de flujo de agua a través de un medio poroso, donde las funciones a aproximar son el potencial de velocidad ϕ y el potencial vector de velocidad ψ (suponemos movimiento plano). Tendremos entonces el siguiente diagrama de aplicaciones:

$$(\xi, \eta) \xrightarrow{T} (x,y) \xrightarrow{A} (\phi,\psi) \qquad (9)$$

$$\text{con } \pi : (\xi, \eta) \to (\phi,\psi)$$

Es decir, $\pi = A \circ T$

Con relación a la figura 3, consideremos el punto singular $S(2\pi-\alpha>\pi)$ y una zona próxima a S limitada por líneas de corriente (ψ = cte) y líneas equipotenciales o piezométricas (ϕ = cte).

En estas condiciones tenemos:

$$A(x,y) = \begin{bmatrix} \psi_I + (\psi_{II}-\psi_I)(r/a)^{\pi/2\alpha} \cos(\pi\varphi/2\alpha) \\ \\ \phi_I + (\phi_{II}-\phi_I)(r/b)^{\pi/2\alpha} \text{ sen } (\pi\varphi/2\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi \\ \phi \end{bmatrix} \qquad (10)$$

(trabajamos en coordenadas polares (r, φ) en lugar de cartesianas (x, y).

Por otro lado elijamos la interpolación más simple posible, lineal:

$$\pi\ (\xi,\eta) = \begin{bmatrix} \dfrac{\psi_I + \psi_{II}}{2} + \dfrac{\psi_{II} - \psi_I}{2}\ \xi \\ \\ \dfrac{\psi_I + \psi_{II}}{2} + \dfrac{\psi_{II} - \psi_I}{2}\ \eta \end{bmatrix} \qquad (11)$$

En consecuencia se deduce de (9) que la transformación geométrica necesaria, que reproduce exactamente la solución analítica (10) es:

$$T = A^{-1} \text{ o } \pi \qquad (12)$$

Desgraciadamente esta transformación no es cuadrática y por tanto no será posible reproducirla con elementos isoparamétricos cuadráticos. En la práctica esto significa que la aplicación T, en vez de aplicar, por ejemplo, la recta $\xi = 1$ sobre la verdadera línea de corriente $\psi = \psi_{II}$ (línea de puntos de la figura 3) sólo la aproximará como se observa en la misma figura, en el sentido de la interpolación, es decir hay coincidencia en los nodos (soporte). Con relación a la misma figura esto quiere decir que si nos fijamos en un punto $\hat{P}$ en el plano (ξ, η) tendremos que:

$$\pi\ (\hat{P}) = (1,\ \eta) = \begin{bmatrix} \psi_{II} \\ \phi \end{bmatrix}$$

Ahora bien, $\pi\ (\hat{P})$ es el valor interpolado en el punto P, ima-

gen de $\hat{P}$ por T, y queda claro que en P, $\psi \neq \psi_{II}$ porque la línea $\xi = 1$ no coincide exactamente con la línea de corriente. Todo ello produce un error, que sin embargo se puede esperar que sea pequeño dado que en realidad verificamos (10) en un sentido medio.

El resultado más interesante (y en cierto modo sorprendente) es que cuando $\alpha = \pi$ la expresión (12) se desarrolla sin excesiva dificultad a partir de (10) y (11), [5], para dar:

$$T(\xi,\eta) = \begin{bmatrix} \frac{a}{4}(1+\xi)^2 - \frac{b}{4}(1+\eta)^2 \\ \frac{ab}{2}(1+\xi)(1+\eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad (13)$$

Como quiera que la expresión (13) es cuadrática en (ξ,η) elementos cuadráticos y de grado más elevados son capaces de reproducirla exactamente, y por tanto reproducir la solución analítica (10) alrededor de S sin ningún error.

En el caso que nos ocupa, se trata de resolver un problema elástico y de aproximar por tanto los desplazamientos. basta para ello considerar el caso $\alpha = \pi$ (y a=b sin pérdida de generalidad) y ubicar los nodos de acuerdo con la regla:

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{a}{4}(1+\xi_i)^2 - (1+\eta_i)^2 \\ y_i &= \frac{a}{2}(1+\xi_i)^2(1+\eta_i) \end{aligned} \qquad (14)$$

Esto da lugar al elemento de la figura 4.

Para obtener, por ejemplo, la posición del nodo 8, pondríamos en (14) $\xi_i = -1$, $\eta_i = 0$, de donde $x_i = -a/4$, $y_i = 0$. Vemos que se trata por tanto de un elemento con nodos a 1/4 como los analizados en [3]. Ahora bien, este elemento tiene frente a aquéllos la ventaja de que

(i) tiene lados curvos, lo que es importante para singularidades distintas de $r^{½}$, que aparecen en problemas elásticos cuando los dominios no son convexos,

(ii) es un elemento cuadrilateral, que se comporta de acuerdo a las fórmulas (10) que pueden aproximar convenientemente las (1) con una adecuada elección de los parámetros; además su comportamiento radial es el deseado como ya se ha demostrado en [18], y

(iii) permite modelizar una fractura con sólo 2 elementos, en contra de los 4 a 8 recomendados en [2] para los elementos a 1/4 clásicos.

4. UN TEST NUMERICO

En la figura 5 aparece el problema tratado.

Se trata de una pieza en deformación plana sometida a una tracción uniforme en los extremos y con una grieta inclinada en el borde.

Para la resolución del problema se efectuó en primer lugar un modelo con un mallado bastante grosero (12 elementos y 49 nodos) que aparece en la figura 6.

Numéricamente el primer problema que se plantea es el mal condicionamiento de la matriz de rigidez del sistema. Esta cuestión es clásica en problemas de elasticidad y da lugar a que el modelo sea estructuralmente inestable. Para resolverlo se ha usado un método de resolución iterativo (gradiente conjugado) con precondicionamiento diagonal [19]. El problema en tales condiciones converge en 104 iteraciones.

Tabla I : Resultados del modelo Fig. 6

	$\frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi a}}$	Teórico [20]	Error (%)	$\frac{K_{II}}{\sigma\sqrt{\pi a}}$	Teórico [20]	Error (%)
r=0.5	1.36	1.20	13.33	0.68	0.57	19.30
r=2	1.28	1.20	6.67	0.62	0.57	8.77

Por otro lado se ha usado un orden de integración 2 x 2 para los cuadriláteros y 3 puntos para los triángulos, como es recomendable para este tipo de elementos [2]. Los resultados obtenidos se recogen en la tabla I, en ella aparecen los factores de forma $K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$ y $K_{II}/\sigma\sqrt{\pi a}$ calculados mediante (4) en los cuatro nodos más próximos al vértice de grieta. Como se ve el error es apreciable. Aunque se ha empleado una relación l/a = 0.04 (donde l es la longitud del elemento singular), que entre dentro de los valores recomendados por diversos autores, [1], [2], [9], para otros elementos singulares y de los límites de aplicabilidad de (4), se comprueba que se obtienen mejores valores para los nodos más alejados de S.

Este erróneo comportamiento del modelo es debido a que la relación entre el tamaño del elemento singular y el de los elementos

adyacentes es muy pequeña, lo que origina una mala representación de los campos asintóticos (1) fuera del elemento singular.

Al objeto de mejorar los resultados del modelo anterior, se han desarrollado sendos modelos más refinados en la zona singular, que aparecen en la Figura 7 y la Figura 8.

En el primero se han utilizado los elementos descritos en el §3 del presente trabajo, mientras que en segundo los seis elementos que rodean el vértice de la singularidad son triángulos standard, triángulos 1/4 [16], y elementos de tipo Akin [11].

Por otro lado se han empleado dos condiciones de contorno distintas (Figura 9) que como se observa en los resultados son equivalentes.

Tabla II: Resultados para los modelos de las figuras 7 y 8

	$F_I = K_I/a$		$F_{II} = K_{II}/a$		Error (%)		
	C.C.1	C.C.2	C.C.1	C.C.2		C.C.1	C.C.2
Modelo 1 (Standard)	1.09	1.09	0.42	0.42	F_I	9.20	9.20
					F_{II}	26.40	26.41
Modelo 2 (Akin)	1.33	1.31	0.70	0.75	F_I	10.84	8.91
					F_{II}	23.46	31.02
Modelo 3 ¼	1.15	1.15	0.56	0.56	F_I	4.14	4.12
					F_{II}	1.00	1.04
Modelo 4 §3	1.18	1.18	0.59	0.59	F_I	1.75	1.60
					F_{II}	3.46	3.82

Tabla III: Resultados K* para los modelos de las figuras 7 y 8

	F_I *		F_{II} *		Error (%)	
	C.C.1	C.C.2	C.C.1	C.C.2	C.C.1	C.C.2
Modelo 2 (Fórmula 7)	1.19	1.19	--	--	F_I 0.55	0.55
					F_{II} --	--
Modelo 3 (6a,b)	0.98	0.98	0.58	0.58	F_I 18.30	18.30
					F_{II} 2.28	2.10
Modelo 4 (6a,b)	1.20	1.21	0.63	0.64	F_I 0.28	0.57
					F_{II} 11.43	12.07

Se puede comprobar, Tabla II, que los resultados son superiores en cálculo en modo I que en modo II. Como es bien sabido el modo de fractura predominante es el I. De hecho, la fisura siempre tiende a propagarse en modo I, [21] y precisamente el hecho de que estén presentes ambos modos de carga al comienzo de la propagación hace que la fisura se desvíe (buscando el modo I). Precisamente por este motivo, las expresiones para los desplazamientos verticales (u_2 y por tanto K_I) dan mucho mejores resultados que las de los horizontales (u_1 y por tanto K_{II}), dado que son de mayor magnitud y mucho más próximos a las expresiones asintóticas (1). De hecho un aumento del ángulo β hasta alcanzar el modo I puro ($\beta = \pi/2$) daría lugar a mucho mejores aproximaciones, como ha sido abundantemente testeado en la literatura [15].

La fórmula (6a) (K^*_I) mejora los resultados del modelo con elementos curvos (§3), mientras que no lo hace para el modelo con elementos 1/4 (Tabla III) esto es bido al hecho de que la relación l/a es mucho más grande para este tipo de elementos y de forma evidente es más exacta la fórmula (4a) como también se demuestra numéricamente en [15]. No sucede lo mismo con las (6b) lo que indica claramente que para el cálculo de K_{II} es recomendable utilizar los desplazamientos horizontales más próximos al vértice de la grieta y un ratio l/a algo más elevado que para el cálculo de K_I.

Observemos también que los elementos de tipo Akin, dan unos

resultados bastante deficientes, esto es debido fundamentalmente al hecho de que como se demuestra en [4] la representación de las deformaciones aproximadas por este tipo de elementos no es la correcta (ver también [17]). Mejoras importantes se pueden obtener para K_I, en cualquier caso, con el empleo de (7).

Digamos por fin que el uso de elementos normales conduce a errores elevados, como es sabido, en el campo de la mecánica de la fractura.

Digamos por fín que todos los cálculos se han llevado a cabo en doble precisión sobre un VAX/8300, usando como código de cálculo el programa MINIMEF [22].

CONCLUSIONES

(i) Para problemas de fractura en modo mixto parece muy interesante el uso de elementos finitos singulares, dado que con ellos se pueden calcular los factores de intensificación de tensiones directamente sin necesidad de un postproceso complejo.

(ii) Dentro de los elementos finitos singulares son recomendables los elementos a 1/4 (triángulos o cuadrángulos de lados curvos del §3) por su sencillez y buenos resultados.

(iii) Los problemas en modo mixto exigen mallados más refinados alrededor de la singularidad (no tan simples como para fracturas, en modo I puro) e incluso el uso de métodos iterativos precondicionados de resolución.

(iv) Para los cálculos es necesario trabajar con las componentes de los desplazamientos en la dirección de la grieta. Los desplazamientos verticales, de los que se deduce K_I, dan mejores resultados que los horizontales, de los que se deduce K_{II}. este hecho ya había sido observado [10] y [15] y es la razón de que en general los elementos singulares deban comprobarse en modo mixto (el más severo "numéricamente"). Obsérvese sin embargo que el modo I, es el predominante y el mejor calculado.

(v) La relación 1/a es importante a la hora de elegir el método de cálculo de K_I y K_{II}. En general conviene una relación 1/a pequeña (<0.1) y usar las fórmulas (4) que tienen un significado físico más evidente (dado que calculan K_I y K_{II} a partir del "salto" de los desplazamientos) [2] y [15].

(vi) Las condiciones de contorno no influyen siempre que estén bien modelizadas en el cálculo de los factores de intensificación.

(vii) Como conclusión general podemos decir que el cálculo de K_I y K_{II} en

modo mixto es importante, dado que supone una etapa previa en cualquier criterio de fractura adoptado, cálculo del ángulo de propagación y estudio de estabilidad; por ello y dado que es difícil emitir recomendaciones generales sobre el uso de elementos singulares, parece necesario efectuar varios tests numéricos para cada elemento y un estudio detallado del modelo de elementos finitos a usar en cada caso concreto.

BIBLIOGRAFIA

[1] S.N. Atluri, "Computational methods for plane problems of fracture", S.N. Atluri edt., Computational methods for plane problems of fracture, Elsevier Science Publishers, 1986.

[2] V.E. Saouma y D. Schwemmer, "Numerical evaluation of the quarter-point crak tip element", Int. J. numer. methods eng. 20, 1629-1641, 1984.

[3] G.M. Thompson y J.R. Whiteman, "Analysis of strain representation in linear elasticity by both singular and nonsingular finite elements", Num. methods for par. diff. eq. 2, 85-104, 1985.

[4] F. Michavila, L. Gavete, F. Díez, "Two different approachs for the treatment of boundary singularities". A aparecer en Numerical Methods for partial differential equations, 1987.

[5] J. Aalto "Singularity elements for seepage problems". Int. J. num. anal. methods in geom. 9, 185-189, 1985.

[6] F. Michavila, L. Gavete, F. Díez, "A new singular finite element in linear elasticity". A aparecer en Computational Mechanics, 1987.

[7] F. Erdogan, "Stress intensity factors". J. of App. Mech., Transactions of the ASME, 50, 992-1002, 1983.

[8] H.D. Bui, "Mecanique de la rupture fragile". Masson, París, 1978.

[9] S.L. Pu, A. Hussain y W.E. Lorensen, "The collapsep cubic isoparametric element as singular element for crack problems". Int. J. num. methods in geom. 12, 1729-1742, 1978.

[10] T.K. Hellen, "A novel approach to crack tip singularity solutions", Computer and Structures, 22, 743-747, 1986.

[11] J.E. Akin, "The generation of elements with singularities". Int. J. num. methods eng. 10, 1249-1259, 1976.

[12] H.D. Bui, "Mecanique de la rupture fragile", problemes non lineaires appliqués: mecanique de la rupture, INRIA, París, 1982.

[13] T. Sussman y K.J. Bathe, "The gradient of the finite element variational indicator with respect to nodal point co-ordinates and explicit calculation and application in fracture mechanics and mesh optimization". Int. J. numer. methods eng., 21, 763-774, 1985.

[14] ADINA, Report AE-84-1. User manual, 1984.

[15] N.A.B. Yehia y M.S. Shephard, "On the effect of quarter element size on fracture criteria". Int. J. num. methods eng. 21, 1911-1924, 1985.

[16] R.H. Henshell y K.G. Shaw, "Crack tip elements are unnecessary". Int. J. num. methods eng. 9, 495-509, 1975.

[17] Y. Yamada, Y. Ezawa, y I. Niohiguchi, "Reconsiderations on singularity on crack tip elements". Int. J. num. methods eng. 14, 1525-1544, 1979.

[18] F. Diez, L. Gavete y F. Michavila, "Nuevas técnicas de tratamiento de singularidades en campos escalares y vectoriales", Anales de Mecánica de la Fractura, editado por G.E.F., Sigüenza, 1986.

[19] P. Joly, "Resolution de systémes lineaires",en MODULEF, une biblioteque modulaire d'éléments finis., INRIA,, 1985.

[20] J.L. Cheissoux y J.F. Juarez: "Fiches de validation du code MAYA en mécanique de la rupture", Mecanique de la rupture, IPSI, París, 1986.

[21] M. Amestoy, H.D. Bui, "Propagation déviée d'unes fissure", problems non linaires appliqués: Mecanique de la rupture INRIA, París, 1982.

[22] L. Ferragut, "MINIMEF. Un programa de E.F. destinado a actividades docentes y de investigación", Documento interno. Dpto. de Cálculo Numérico e Informática. ETSI Minas. Madrid, 1984.

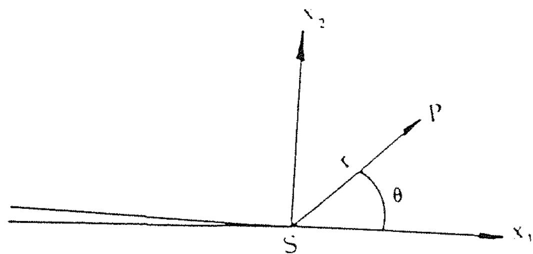


Fig. 1 - Ejes locales en el vértice de grieta.

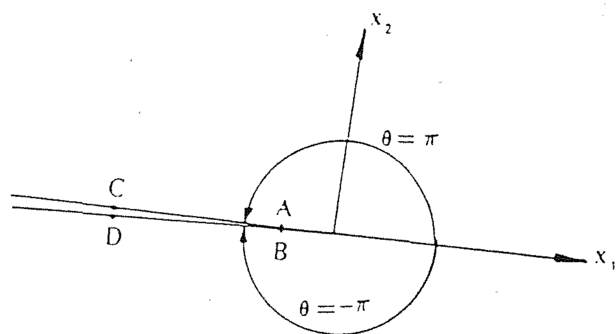


Fig. 2 - Cálculo de los F.I.T.

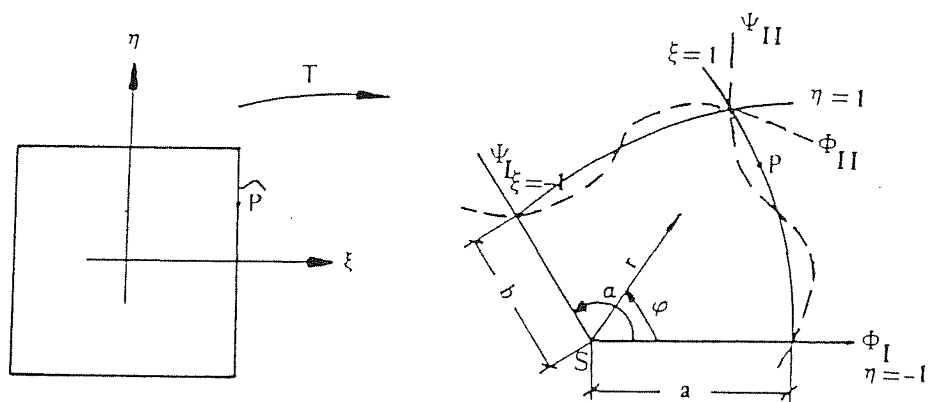


Fig. 3 - Elemento singular

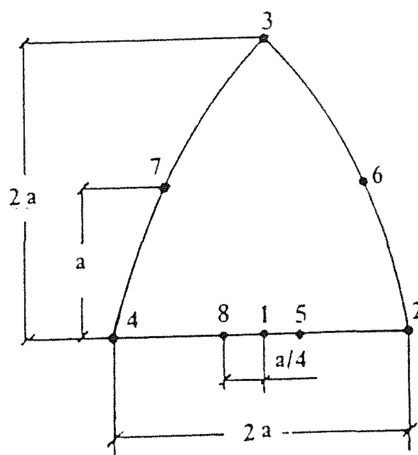
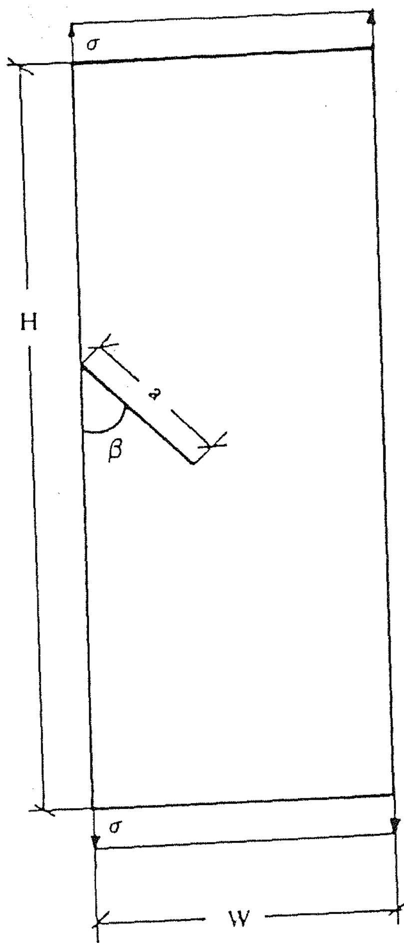


Fig. 4 - Caso $\alpha = \pi$



$\beta = \pi/4$
$H = 250$ mm
$W = 100$ mm
$a = 50$ mm
$E = 20000$ Kgmm^{-2}
$\nu = 0.3$
$\sigma = 10$ Kgmm^{-2}
Deformación plana

Fig. 5 - Problema estudiado

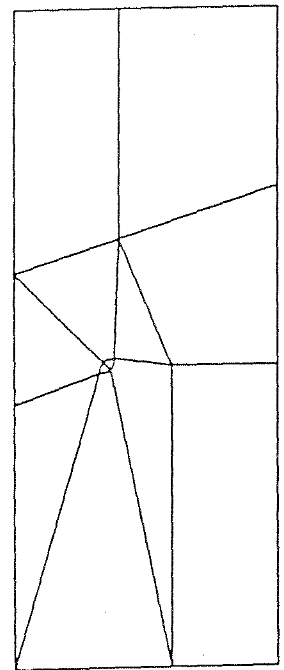


Fig. 6 - Modelo grosero

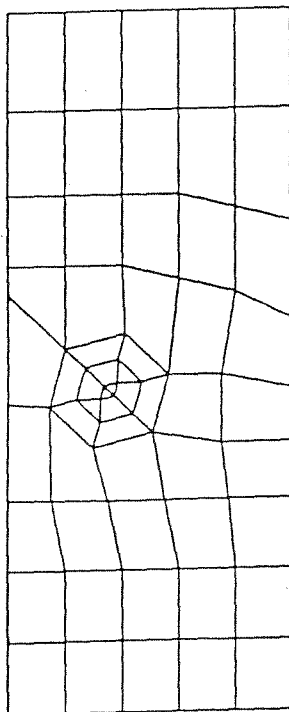


Fig. 7 Modelo 4

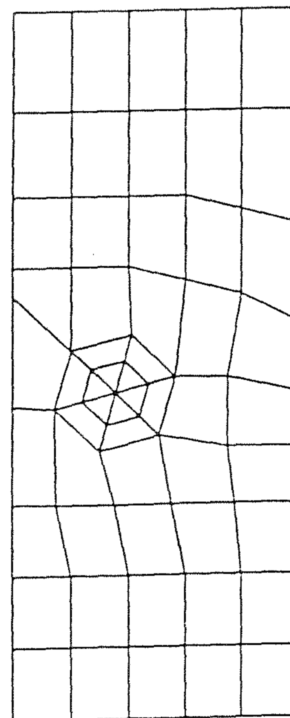


Fig. 8 - Modelos 1, 2 y 3

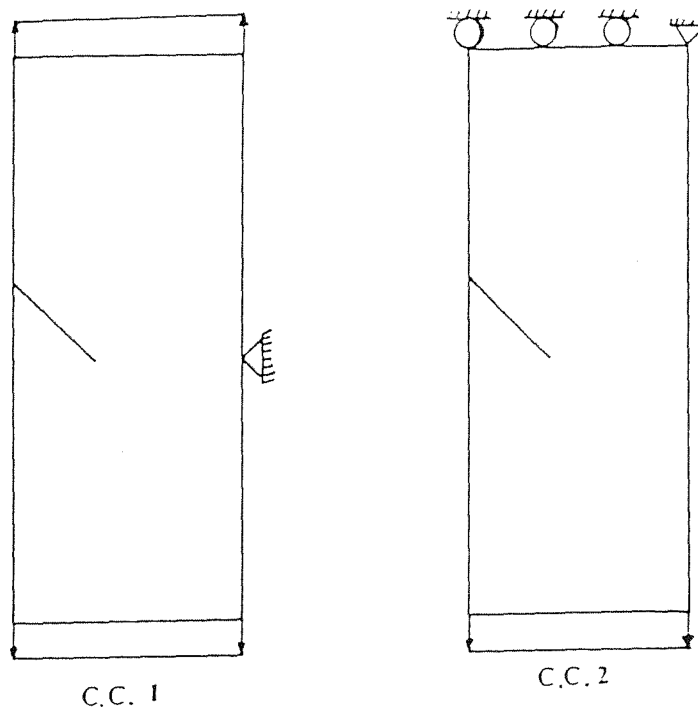


Fig. 9 - Condiciones de contorno